This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

QA
466
.C73

Digitized by Google

BIBLIOTECA RICCARDI
in Modena
III
S. VIII F. 5(1) N. 12.

Digitized by Google

QA
466
.C73

Digitized by Google

Digitized by Google

LA

DVPLICATION DV CVBE, LA TRISECTION DE L'ANGLE, ET L'INSCRIPTION DE L'HEPTAGONE REGVLIER DANS LE CERCLE.

Par M. CLAVDE COMIERS d'Ambrun, Preuoſt de l'Egliſe Collegiale de Ternant.

Opus eſtimatur ex difficultate. Ariſtot. 7. Eudem. cap. 8.

A PARIS,
Chez Loüis Billaine.

M. DC. LXXVII.
AVEC PERMISSION.

Digitized by Google

Digitized by Google

A MONSEIGNEVR

COLBERT,

CHEVALIER, MARQVIS DE SEIGNELAY, Baron de Seaux & autres lieux, Conſeiller ordinaire du Roy en ſon Conſeil Royal & en tous ſes Conſeils, Commandeur & grand Treſorier de ſes Ordres, Secretaire d'Eſtat & des Commandemens de ſa Majeſté, Controleur general des Finances, Sur-Intendant & Ordonnateur general des Baſtimens, Arts & Manufactures de France.

MONSEIGNEVR,

La Préciſion ſi neceſſaire en Geometrie fait que les plus ſçavans Mathematiciens ont mis de tout temps au rang des choſes impoſsibles, l'Inſcription de l'Heptagone Regulier dans le Cercle, la Triſection

H.C.M.

Digitized by Google

de l'Angle & la Duplication du Cube, que l'Oracle d'Apollon auoit demandée aux Habitans de l'Isle de Delos pour estre délivrez de la peste. C'est pourquoy si les Ouvrages meritent quelque estime par leur difficulté, j'ose me promettre que la solution de ces trois fameux Problêmes que je donne dans toute la rigueur & précision Geometrique, n'employant que la Regle & le Compas, sera receuë favorablement de Vostre Grandeur, puis qu'elle applique vne partie de ses soins à faire perfectionner les Arts & les Sciences dans la plus florissante Monarchie du monde. C'est, MONSEIGNEVR, ce qui me fait prendre la liberté de vous offrir ce fruict de mes Etudes Geometriques, & les protestations d'estre toute ma vie auec vn profond respect,

MONSEIGNEVR,

De Vostre Grandeur,

Le tres-humble & tres-obeïssant
serviteur COMIERS,
Prevost de Ternant.

Digitized by Google

Ch. Com.
Maçons
2-1828
16615

LA DVPLICATION DV CVBE, LA TRISECTION DE L'ANGLE, ET L'INSCRIPTION DE L'HEPTAGONE REGVLIER DANS LE CERCLE.

CHAPITRE PREMIER.

Abregé de ce que les Geometres anciens & modernes ont escrit de la Duplication du Cube.

LA Duplication du Cube a tellement passé pour impossible dans l'Antiquité, que l'Oracle d'Apollon pour se défaire des prieres importunes de ceux qui luy demandoient qu'il fit cesser la peste dans l'Isle de Delos, leur commanda de doubler vn certain Autel qui estoit Cubique, ce qui obligea les habitans d'envoyer des Ambassadeurs vers Platon à Athenes & vers les autres sçavans Geometres de la Grece, pour leur demander le moyen de satisfaire à l'Oracle; ainsi que Vitruve le raconte dans le second Chapitre de son neufviéme Livre.

Digitized by Google

Long-temps auparavant on auoit eſté dans la meſme peine au dire d'Eratoſtene Cyreneen dans ſa lettre au Roy Ptolomée, qu'Eutocius Aſcalonite rapporte dans ſon Commentaire ſur le ſecond Livre d'Archimede de la Sphere & du Cilindre; car le Sepulchre de cent pieds en tout ſens que Minos avoit fait bâtir à Glaucus n'eſtant pas jugé eſtre aſſez grand, on ordonna que celuy de Ciron fût double: Et les Architectes ayant conſideré que s'ils doubloient les coſtez du Sepulchre de Glaucus, celuy de Ciron ſeroit Octupie, & par conſequent de ſix millions de pieds Cubes plus grand qu'il n'eſtoit requis: ils firent dés lors vn défy à tous les Geometres de trouver la ſolution de ce Probleme, qu'ils appellerent la Duplication du Cube.

Celuy qui alla le plus auant fut Hippocrates le Mathematicien, qui découvrit que le coſté d'vn Cube double d'vn autre, eſtoit la premiere ou moindre de deux lignes continuellement proportionelles entre deux lignes extremes, dont la derniere eſt double de la premiere égale à la Racine du coſté du Cube donné à doubler: Mais la difficulté demeura à trouver les deux Moyennes Proportionelles dans la Préciſion Geometrique.

Platon fondateur de cette Academie d'Athenes, qui a donné le nom à toutes les celebres Aſſemblées qui travaillent à perfectionner les Arts & les Sciences, répondit aux Ambaſſadeurs de Delos, au rapport de Plutarque dans la vie de Marcellus, que ce Probleme ne pouvoit ſe reſoudre que mecaniquement: & pour cét effet ce divin Philoſophe & Mathematicien inventa vn inſtrument compoſé de quatre pieces ſolides, l'vne deſquelles il faiſoit gliſſer parallelement à la quatriéme piece dans la fente ou couliſſe des deux autres qui formoient vne double Equerre.

Heron, Philon Bizantin & Apollonius Pergeus, n'eurent qu'vne meſme methode. Diocles, Pappus Alexandrin & Sporus Nicenus s'y prirent d'vne autre maniere, & tous ne travaillerent qu'en taſtonnant & en faiſant mille eſſais pour voir ſi le hazard leur feroit rencontrer ſur les coſtez oppoſez & prolongez d'vn parallelogramme, deux points qui fuſſent également diſtans de ſon centre, en ſorte qu'vne ligne droite tirée par ces points, paſſaſt ſur le coin de ce parallelogramme fait des deux lignes, dont l'vne eſtoit double de l'autre.

Menecmus employa les Sections Coniques; & Architas Tarentin la deſcription des Hemicilindres, au rapport de Vitruve.

Digitized by Google

Eratoſtene fait mention dans ſa lettre au Roy Ptolomée, des advantages qu'on peut tirer de la ſolution de ce Probleme, principalement en la conſtruction des Machines de guerre ; & aprés avoir remarqué qu'on ne pouvoit mettre en pratique aucune des inventions de tous ces grands hommes, il donne vn Mezolabe compoſé de trois Parallelogrammes égaux auec leurs Diagonales, pour chercher à taſtons & au hazard les deux Moyennes Proportionelles, faiſant couler ces trois pieces l'vne ſur l'autre auec vne pratique impoſſible à executer dans quelque Préciſion, quand meſme ces trois Parallelogrammes n'auroient aucune épaiſſeur Phyſique. Il fit preſent de cette Machine au Roy Ptolomée, comme d'vn inſtrument merveilleux.

Nicomede a demonſtré que l'invention d'Eratoſtene n'avoit rien de geometrique, & que ſa machine pouvoit encore moins eſtre miſe en pratique que celles des autres, & a donné dans ſon Livre des Lignes Conchoides vne Methode longue & embaraſſée, pour trouver les deux Moyennes Proportionelles, il fait vn Parallelogramme des deux extrémes données, autour duquel ayant fait pluſieurs Angles & Lignes il cherche à mener d'vn point donné vne ligne droite ſur vn autre, en ſorte qu'elle ſoit également coupée par vne ligne donnée de poſition ; & pour y parvenir, il fait vne ligne courbe qu'il appelle Conchile, par le moyen d'vne Machine compoſée de quatre branches, chacune deſquelles a encore pluſieurs autres parties, & des mouvemens tres mixtes. C'eſt pourquoy Eutocius Aſcalonite a eu raiſon de laiſſer par eſcrit, que Nicomede tiroit ſans ſujet vanité d'vne telle Machine.

Archimede ayant eu beſoin de la ſolution de ce Probleme pour la demonſtration du ſecond Theoreme de ſon deuxiéme Livre de la Sphere & du Cilindre, ſe contenta de demander les deux Moyennes Proportionelles au lieu d'enſeigner quelque Methode pour les trouver.

Enfin Mr Deſcartes tres fameux entre les modernes, a dit dans le commencement de ſa Geometrie, qu'on ne pouvoit trouver les deux Moyennes Proportionelles, ny faire la Triſection de l'Angle ſans employer quelque ligne plus compoſée que la Circulaire ; c'eſt pourquoy perſeverant dans cette opinion, il donne dans la page 370. ſa façon de décrire cette ligne compoſée, par vne Machine conſtruite auec ſept Regles differentes qui forment quatre Equerres, qu'il fait mouvoir par vn

Digitized by Google

mouvement tres composé; ce qui a obligé Mr l'Abbé Mariotte de demonſtrer dans l'Academie Royale des Sciences, que cette Machine ne pouvoit eſtre d'aucune vtilité dans la Pratique, outre qu'il faudroit que toutes les pieces fuſſent ſans épaiſſeur Phyſique, attendu qu'il faut qu'elles coulent les vnes ſur les autres.

Quant aux Sections Coniques que Mr Deſcartes a employées pour la Duplication du Cube & pour la Triſection de l'Angle, on n'en doit attendre aucune vtilité ny préciſion dans la ſolution de ces Problemes, car la ligne Parabolique ne peut eſtre tirée qu'à veuë d'œil & à repriſes de points en points trouvez ſur les ordonnées: ou par vn filet double de la diſtance du foyer, & toûjours également tendu contre le coſté d'vn Equerre, dont l'autre coſté coule le long de la ligne perpendiculaire à l'Axe ſur le point du Foyer, dautant qu'il faudroit l'adreſſe d'vn Ange pour conduire Paraboliquement la plume ou le filet tendû dans cette exacte juſteſſe & préciſion Geometrique ſi abſolument neceſſaire à la ſolution de ce grand Probleme de la Duplication du Cube, où la moindre Erreur Mathematique dans la Racine devient tres monſtrueuſe dans le ſolide. Car par exemple la Racine ou coſté du Cube donné à doubler eſtant de 100000000 cent millions de pieds, ſa ſolidité eſt de 1000000000000000000000000 pieds Cubes, & par conſequent le Cube double requis doit eſtre preciſément de 2000000000000000000000000 pieds Cubes; & lors qu'il s'agit de déterminer & aſſigner en la quantité diſcrete ou nombres la Racine Cubique de ce nombre, on eſt reduit à l'impoſſible; car ſi on ne prend cette Racine que de 125992105 pieds, la ſolidité du Cube ne ſera que de 1999999977822056446557625 pieds Cubes, beaucoup moindre que le Cube requis. Que ſi vous augmentez cette Racine Cubique d'vne vnité ſeulement, mettant vn 6 à la place du 5 qui eſt le dernier chifre, vous aurez 125992106 pieds Racine ou coſté d'vn Cube qui ſera de 2000000048122667291527016 pieds Cubes, exorbitement plus grand que le requis, l'excez eſtant de 48122667291527016 pieds Cubes.

D'où il s'enſuit que de quelque maniere qu'on décrive la Parabole, on ne ſera jamais hors d'erreur moindre d'vne cent milliéme partie, & qu'on n'en peut tracer aucune dans la Préciſion Geometrique. Ce qui eſt la cauſe que les miroirs brûlans pretendus Paraboliques, dégenerent au fonds en Spheriques, & ne

ne font pas vn meilleur effet en égale ſurface qu'vn miroir ſimplement Spherique, pourveu qu'il ne ſoit que Segment de 18 degrez, ou vingtiéme partie de tout le Cercle.

Par conſequent ces trois fameux Problemes de la Duplication du Cube, de la Triſection de l'Angle & de l'Inſcription de l'Heptagone Regulier, ſont encore ſans ſolution vtile & ſuffiſante: puis qu'on ne peut mettre en pratique dans quelque préciſion, aucune des Inventions des Geometres tant anciens que modernes: leſquels ſe ſont mécontez quand ont ils ont crû que la ſolution de ces Problemes eſtoit impoſſible, autrement que par machines ou par des lignes plus compoſées que la Circulaire. Ce que ie demonſtreray plus amplement dans ma nouvelle Geometrie; & en attendant pour ſatisfaire à ce qui eſt porté dans le IX. Iournal des Sçavans, du 11 May 1676. je donne icy vne Pratique facile & geometrique où on n'a beſoin que de la Regle & du Compas, qui ne paſſent point pour machines chez les Mathematiciens, & qui n'oſtent rien de cette Préciſion Geometrique requiſe dans la ſolution des Problemes.

CHAPITRE SECOND.

Pratique de la Duplication du Cube, par le Compas & la Regle.

BIEN que les Mathematiciens employent de neceſſité abſoluë la Regle & le Compas, & qu'ils reçoivent pour Geometrique tout ce qu'on demonſtre par les Elements d'Euclide. aprés l'avoir conſtruit & executé avec ces deux ſimples inſtruments: les Geometres n'avoient neantmoins encore pû trouver par leur moyen aprés deux mille ans d'étude, ny la Duplication du Cube, ny la Triſection de l'Angle, ny l'Inſcription de l'Heptagone regulier dans le Cercle.

Le Compas que j'employe, bien qu'il ait ſes deux branches plattes & couchées ſur le Plan, n'eſt point different du Compas commun & ordinaire, dont l'invention coûta ſi cher à Perdrix & à la jalouſie de Dedale, ſi on en veut croire Ovide dans le ſeptiéme Livre des Metamorphoſes *Dedalus inuidit.*

Les branches E M, M D ſont égales & jointes par la charniere M. Dans l'vſage de ces Problemes on applique vne regle

le long de la branche EM, ſi mieux on n'aime que ce ſoit la meſme branche EM directement continuée vers C, ainſi que la figure le repreſente; & dautant que le Compas doit eſtre couché à plat ſur le plan, la pointe D de la branche MD doit eſtre rebrouſſée en bas pour demeurer ferme ſur le point D pendant que la pointe E de la branche ME coulant ſur la ligne RE tout le Compas s'ouvre & roule ſur cette pointe D fixe au centre comme il arrive au Compas ordinaire. Au lieu de rebrouſſer la pointe D, il eſt plus commode de reſerver de la matiere de la branche autour du point D, que l'on percera pour y paſſer la pointe d'vne aiguille.

Le Cube A, ſoit le Cube donné, & qu'il faille faire le Cube B qui ſoit double.

Tirez la ligne ES, ſur laquelle prenez SR égale à DM branche du Compas, laquelle, pour l'exemple, je ſupoſe eſtre égale au coſté ou Racine du Cube donné A.

Du point S élevez ſur SE la perpendiculaire SC, & prenant vne ligne double de SR, appliquez-la du point R en C contre la perpendiculaire SC, vous aurez la ligne RC, partagez-la également en D.

Mettez la pointe D de la branche du Compas ſur le point D milieu de la longueur de la ligne RC.

Tirez en ſuite par le Bouton I la branche EM en l'éloignant du point R, en ſorte que la pointe E de la branche EM du Compas coule toûjours le long de la ligne RE juſqu'à tant que le coſté de la meſme branche produite ou vne Regle y appliquée touche le point C. Section des lignes RC, SC.

Pour lors la ligne RE eſt la RACINE OV COSTE' DV CVBE, B, DOVBLE DV CVBE, A, ce qui eſtoit propoſé à faire.

CHAPITRE TROISIESME.

Demonſtration de la Duplication du Cube.

POVR rendre cette demonſtration bien intelligible, j'en fais quatre parties.

Dans la premiere, je conſtruis quelques lignes, & en tire quelques Corollaires.

Dans la ſeconde, je demonſtre que les lignes SR, RE, EF, FH,

Digitized by Google

ſont Continuellement & Geometriquement Proportionelles.

Dans la troiſieſme, je demonſtre que la ligne EH eſt double de la ligne SR coſté ou Racine du Cube A donné à doubler, & c'eſt en cette Partie que pour aider l'imagination & ſuivre commodément la demonſtration, il faut voir la ſeconde Planche, parce que ces figures font voir au doigt & à l'œil la ſuite des demonſtrations de cette troiſieſme Partie.

Dans la quatrieſme, je conclus qu'entre les deux lignes extremes SR, EH, dont la derniere eſt double de la premiere, les deux lignes RE, EF ſont deux Moyennes Continuellement Proportionelles, & que par conſequent le Cube de HE, eſt double du Cube de EF, & le Cube de EF, double du Cube de ER, & le Cube B de ER, double du Cube donné A de RS. Ce qui ſera enfin la ſolution du fameux Probleme autrefois demandé par l'Oracle d'Apollon aux habitans de l'Iſle de Delos.

PARTIE I.

CONSTRVCTION ET COROLLAIRES.

§. 1. TIREZ la ligne RM, elle ſera perpendiculaire ſur EC, & le Triangle RMC ſera rectangle. Car par la conſtruction les lignes DR, DC, DM ſont égales, doncques les Triangles RDM, MDC ſont iſoſceles, & l'Angle CDM externe vaut les deux Angles internes oppoſez DRM, DMR, & par conſequent il vaut deux fois l'Angle DMR. De meſme l'Angle externe RDM vaut les deux Angles internes oppoſez DCM, DMC, & par conſequent il vaut deux fois l'Angle DMC. Donc les Angles CDM, MDR pris enſemble, valent deux fois les deux Angles RMD, DMC. Mais les deux Angles RDM, MDC valent deux Angles droits, *par la XIII propoſition du premier Livre des Elements d'Euclide.* Donc deux fois les deux Angles RMD, DMC pris enſemble valent auſſi deux Angles droits. Donc eſtant tous deux pris vne ſeule fois enſemble ils valent vn Angle droit. Donc l'Angle RMC eſt droit. Donc l'Angle RME eſt auſſi droit *par la XIII propoſition du premier des Eleniens.*

Donc le Triangle RME eſt Rectangle.

§ 2. Du point R élevez ſur ES la perpendiculaire RF, elle ſera parallelle à SC, & du point F tirez FH parallelle à MR, elle ſera auſſi perpendiculaire ſur EC. par conſequent le Triangle EFH ſera Rectangle.

Digitized by Google

§ 3. Du point F tirez FG parallele à RS, elle ſera égale à RS, & perpendiculaire ſur SC, ainſi que l'eſt RS par la conſtruction, par conſequent le Parallelogramme RSFG ſera Rectangle.

Donc le Triangle FGC ſera auſſi rectangle.

§ 4. Les Triangles rectangles EMR, FGC ſont ſemblables & égaux. Premierement ils ſont ſemblables, parce qu'outre leurs Angles droits ils ont chacun vn Angle égal, ſçavoir l'Angle REM, égal à l'Angle GFG. *par le XXIX propoſition du premier des Elements*; Car ES, & FG ſont paralleles. Donc leurs troiſieſmes Angles ſont égaux, ſçavoir ERM, FCG. Donc les Triangles EMR, FGC, ſont equiangles, & par conſequent ſemblables.

Leſdits Triangles EMR, FGC ſont égaux, *par le XXVI propoſition du premier Livre des Elements*, parce qu'outre l'égalité des Angles ils ont encore vn coſté égal, ſçavoir le coſté EM égal au coſté FG, puiſque tous deux ſont égaux à la ligne SR; ſçavoir EM par la conſtruction du Compas, & FG, pour eſtre ſemblablement inclinée entre les Paralleles RF, SC.

Donc les Triangles Rectangles EMR, FGC ſont ſemblables & égaux, & ont par conſequent tous leurs coſtez égaux.

DONC ER eſt égale à FC.

PARTIE II.

DEMONSTRATION

Que les lignes SR, ER, EF, EH ſont Continuellement Proportionelles.

§ 1. LE Triangle ERF eſt rectangle par conſtruction, & MR eſt perpendiculaire ſur EC, *par la concluſion du § 1. de la premiere Partie*. Donc EMR eſt equiangle & ſemblable au Triangle total ERF. *par la VIII. propoſition du VI des Elemens d'Euclide*, dautant qu'ils ſont tous deux Rectangles, & qu'ils ont en E vn Angle commun.

Donc *par la IV Propoſition du VI des Elimens* des Triangles equiangles EMR, ERF, les coſtez de l'vn qui comprennent vn Angle ſont Proportionaux, c'eſt à dire, ont meſme raiſon entr'eux, que celle qu'ont entr'eux les coſtez de l'autre Triangle, qui comprennent vn meſme Angle ou ſemblable.

Mais dans le petit Triangle EMR, la Baze ME & l'Hypothenuſe ER qui comprennent l'Angle MER, ſont Homologues dans le

Digitized by Google

le Triangle total ERF, à la Baze ER, & à l'Hypotenuſe EF, *parce qu'ils comprennent le meſme Angle commun MER.*

Donc comme EM eſt à ER, ainſi ER eſt à EF.

§ 2. Le Triangle EFH eſt Rectangle, *par le § 2. de la premiere Partie*, & RF eſt perpendiculaire ſur EH *par la conſtruction.* Donc la perpendiculaire RF qui tombe de l'Angle droit EFH ſur l'Hypotenuſe EH fait le Triangle FRE equiangle & ſemblable au Triangle rectangle total EFH *par la VIII propoſition du VI des Elements, parce qu'outre leurs Angles droits ils ont encore en E vn Angle commun.*

Donc ces Triangles FRE, EFH ſont Proportionaux, *par la IV Propoſition du VI des Elements.*

Mais dans le petit Triangle FRE la Baze RE, & l'Hypothenuſe EF qui comprennent l'Angle REF ſont Homologuez dans le Triangle total EFH, à la Baze EF & à l'Hypothenuſe EH, *parce qu'ils comprennent auſſi le meſme Angle commun FEH.*

Donc comme ER eſt à EF, ainſi EF eſt à EH.

RECAPITVLATION.

Comme EM eſt à ER, ainſi ER eſt à EF.

Comme ER eſt à EF, ainſi EF eſt à EH.

Donc comme EM eſt à ER, ainſi ER eſt à EF, & EF à EH.

Donc EM—ER—EF—EH—ſont Continuellement Proportionelles. Mais EM eſt égale à SR *par la conſtruction.*

Donc SR—ER—EF—EH—ſont quatre lignes Continuellement Proportionelles; ce qu'il falloit demonſtrer.

PARTIE III.

DEMONSTRATION

Que des quatre lignes SR, ER, EF, EH Continuellement Proportionelles, l'extréme EH eſt double de l'extréme SR.

COMME cette Demonſtration decide la queſtion, & qu'elle eſt tres difficile & embaraſſée, il faut en meſme temps avoir devant ſoy & la premiere Planche & la ſeconde, laquelle aidera l'imagination par la repreſentation des quarrez & rectangles que j'employe, provenans de la puiſſance de la ligne EC. eu égard à ſa diviſion en F, ou conſiderée comme ſoûtenant l'Angle obtus ERC.

Digitized by Google

Le Quarré de la ligne totale EC, de la premiere planche, Figure premiere, eſt égal à la ſomme des deux Quarrez de ſes parties EF, FC, & à la ſomme de deux fois le Rectangle fait par leſdites parties EF, FC. *par la IV. Propoſition du ſecond Livre des Elements d'Euclide.* Ce qui eſt figuré (mais au petit pied) dans la ſeconde planche, Figures I. & II.

Mais le Quarré de la meſme ligne EC, *dans la premiere planche Figure premiere*, conſiderée comme Baze du Triangle obtus ERC eſt égal à la ſomme des Quarrez des deux coſtez ER, RC, & à la ſomme de deux fois le Rectangle fait par le coſté ER, & par la diſtance RS *qui eſt dans la premiere planche, Fig. I.* depuis R juſqu'à la perpendiculaire SC, *par la XII Propoſition du ſecond des Elements.* Ce qui eſt auſſi Figuré dans la planche ſeconde Figure III.

Donc *dans la ſeconde Planche, Fig.* III. la ſomme des Quarrez de ER, RC, & de deux fois le Rectangle fait de ER RS eſt égale *dans la ſeconde planche Fig.* II. à la ſomme des Quarrez de EF, FC, & de deux fois le Rectangle fait de EF, FC, parce que chacune deſdites ſommes eſt égale au Quarré de la ligne totale EC. *dans la planche* II. *Fig.* I. & ce ſuivant l'Axiome *quæ ſunt æqualia vni tertio ſunt æqualia inter ſe.*

Si deſdites ſommes égales *dans la Planche* II. *Fig.* II. *&* III. vous oſtez choſes égales, à ſçavoir de la Fig. II. le Quarré de FC. & de la Fig. III. le Quarré de ER, les ſommes reſtantes ſerõt égales.

Donc dans la Fig. V. la ſomme du Quarré de RC. & de deux fois le Rectangle fait de ER, RS, eſt égale dans la Fig. IV. à la ſomme du Quarré de EF, & de 2 fois le Rectangle fait de EF, FC.

Mais dans la Fig. V. §. 2. la ſomme de deux fois le Rectangle fait de ER, RS, eſt égale dans la meſme Fig. V. au Rectangle fait de ER, RC. parce que par la conſtruction RC eſt double de RS.

Donc en ſubſtituant vn ſeul Rectangle cy-deſſus, Fig. V. §. 2 fait de ER, RC égal aux deux Rectangles faits de ER, RS. la ſomme du Quarré de RC & du Rectangle fait de ER RC, eſt égale dans la Fig. IV. à la ſomme du Quarré de EF, & de deux fois le Rectangle fait de EF, FC.

Mais dans la Fig. V. la ſomme du Quarré de RC. & du Rectangle fait de ER, RC, eſt égale dans la Fig. VII. au Rectangle fait de RC & des lignes ER, RC priſes enſemble, parce que RC eſt coſté commun du Quarré de RC, & du Rectangle fait de ER, RC. Or il eſt auſſi coſté du grand Rectangle EC, CR, duquel

Digitized by Google

le ſecond coſté EC eſt compoſé des deux lignes ER, RC priſes enſemble.

Donc dans la Fig. VII. le grand Rectangle ECR, eſt égal dans la Fig. IV. à la ſomme du Quarré EF, & a deux fois le Rectangle fait de EF, FC. parce que cette ſomme de la Fig. IV. & le Rectangle de la Fig. VII. ſont l'vn & l'autre égaux à la ſomme de la Fig. V.

Il s'agit maintenant de changer les deux Rectangles de la Fig. IV. §. 2. en deux Rectangles entr'eux égaux & de meſmes coſtez dans la Fig. VI. §. 2. & de changer auſſi le Quarré de la Fig. IV. §. 1. en vn Rectangle dans la Fig. VI. § 1. qui ait les meſmes coſtez que ceux du § 2. afin de faire de ces trois Rectangles égaux, le Rectangle HEC de la Fig. VIII. qui ſoit égal au Rectangle RCE de la Fig. VII.

La ſomme de deux fois le Rectangle de EF, FC, Fig. IV. § 2. eſt égale dans la Fig. VI. § 2. à la ſomme de deux fois le Rectangle fait de EM, EH. car les lignes EM, ER, EF, EH, ſont Continuellement Proportionelles par la premiere concluſion de la Recapitulation de la Partie Seconde. Mais ER eſt égale à FC *par la concluſion de la Partie premiere.*

Donc EM, FC, EF, EH, ſont Continuellement Proportionelles.

Donc les Rectangles faits des deux extrémes EM, EH, ſont égaux aux Rectangles faits des deux moyennes FC, EF, *par la XVI Propoſition du VI Livre des Elements.*

Donc dans la Fig. VI. § 2. les deux Rectangles faits des lignes EM, EH, ſont égaux aux deux Rectangles de la Fig. IV. § 2. faits des lignes EF, FC.

Mais dans la Fig. VI. § 2. la ſomme de deux fois le Rectangle fait des lignes EM, EH, eſt dans la meſme Fig. VI. § 2. égale au Rectangle fait des lignes EH, RC, parce que RC eſt double de EM. (qui eſt égale à RS par la conſtruction, Planche I. Fig. I.) & par ainſi le grand Rectangle de la Fig. VI. § 2. fait des lignes HE, RC contient dans la meſme Fig. § 2. deux fois le Rectangle fait des lignes EH, EM, dautant que le coſté EH eſt commun aux petits Rectangles & au grand, & que le coſté RC du grand Rectangle eſt double du coſté EM, des petits Rectangles.

Donc la ſomme du Quarré EF de la Fig. IV. § 1. auec le Rectangle HE, RC de la Fig. VI. § 2. eſt égal au Rectangle EC, CR de la Fig. VII.

Mais le Quarré de EF de la Fig. IV. § 1. eſt égal dans la Fig. VI.

Digitized by Google

§ 1. au Rectangle fait des lignes ER, EH, parce que cette ligne EF par la derniere concluſion de la Partie ſeconde, eſt Moyenne Proportionelle entre leſdites deux lignes ER, EH, & par conſequent le Quarré de EF Moyenne Proportionelle, vaut le Rectangle fait des deux extremes ER, EH. *par la XVII Propoſition du VI Livre des Elements.*

Donc à la place du Quarré EF ſubſtituant le Rectangle HER, dans la Fig. VI. § 1. la ſomme faite dudit Rectangle HER, & du Rectangle HE, RC, ſera égale au Rectangle ECR de la Fig. VII.

Mais la ſomme du Rectangle fait de HE, ER, & du Rectangle fait de HE, RC de la Fig. VI. eſt égale au Rectangle de la Fig. VIII. fait de HE, & de ER, RC, priſes enſemble, parce que les deux Rectangles de la Fig. VI. ont chacun la ligne HE pour vn coſté, & les lignes ER, RC, leur ſervent de ſecond coſté. Donc le grand Rectangle de la Fig. VIII. les contient tous deux, parce qu'il a la ligne commune HE pour vn coſté, & l'autre coſté EC contient leurs deux autres coſtez ER, RC.

Donc le Rectangle de la Fig. VIII. fait de HE & de ER, RC priſes enſemble, eſt égal au Rectangle de la Fig. VII. fait de RC & de ER, RC priſes enſemble.

Donc ces deux Rectangles égaux ayant leurs grands coſtez EC égaux, ont auſſi leurs deux petits coſtez égaux; ſçavoir HE Fig. VIII. à RC, Fig. VII. *par la XIV Propoſition du VI Livre des Elemens.*

Mais RC eſt double de RS par la conſtruction. Planche I. Fig. I.

Donc HE eſt auſſi double de RS. Ce qu'il falloit demonſtrer.

PARTIE IV.

DEMONSTRATION

Que le Cube B qui a pour Racine ou Coſté la ligne RE, eſt double du Cube A, qui a pour Racine ou Coſté la ligne RS.

LES quatre lignes SR, RE, EF, EH, ſont Continuellement Proportionelles *par la derniere concluſion de la Recapitulation de la Partie ſeconde.*

Mais *par la concluſion cy-deſſus de la Partie troiſieſme*, la ligne extreme EH eſt double de SR, l'autre extreme.

Donc entre les deux extremes SR & EH, dont la derniere eſt double de la premiere, j'ay donné les deux Moyennes Continuellement Proportionelles RE, EF, auec la Regle & le Compas, meſme

Digitized by Google

meſme ſans employer aucun Cercle; ce que Mr Deſcartes auoit prononcé eſtre impoſſible dans ſa Geometrie, page 370.

Mais le Cube B a pour Racine ou coſté la ligne RE, qui eſt la premiere ou moindre des deux Moyennes Proportionelles, entre deux lignes extremes RE, EH, dont la derniere eſt double de la premiere.

Donc le Cube B eſt double du Cube A, qui a pour Racine ou coſté la ligne SR, la premiere & moindre deſdites Quatre Continuellement Proportionelles.

Parce que par le Corollaire de la XXXIII du XI Livre des Elemens, s'il y a Quatre lignes Continuellement Proportionelles, SR, RE, EF, EH, comme la premiere SR, eſt à la Quatriéme EH, ainſi A le Parallelepipede, ou Cube fait ſur la premiere SR, eſt au Parallelepipede ſemblable, ou Cube B fait ſur RE, la ſeconde deſdites Quatre Continuellement Proportionelles, dautant que les Cubes ſont entr'eux en Raiſon Triplée de leurs Racines par la XII Propoſition du VIII Livre d'Euclide, attendu que la Premiere ligne SR a vne Raiſon triplée à la Quatriéme ligne EH, de celle qu'elle a à la Seconde RE.

DONC ON A LA DVPLICATION DV CVBE, ET LA SOLVTION DE CE FAMEVX PROBLEME PROPOSE' PAR L'ORACLE D'APOLLON.

CHAPITRE QVATRIESME.

Faire Geometriquement & tout à coup la Duplication de tous Cubes donnez.

PARCE qu'on me pourroit objecter qu'ayant ſupoſé le coſté du Cube donné égal au coſté du Compas, il faudroit auoir autant de differents Compas qu'on donneroit de differentes Racines ou coſtez des Cubes à doubler, voicy vne Methode Facile, Generale & Geometrique, pour donner la Racine d'vn Cube requis double d'vn Cube donné.

Tirez dans la Planche premiere, Figure Seconde, la ligne KQ ſur laquelle prenez KP égale à ER, & du milieu de KP faites vn demy Cercle, dans lequel du point K appliquez KN égale à EM. Tirez la ligne NP. Le Triangle KNP ſera Rectangle, *par la XXXI Propoſition du troiſiéme Livre d'Euclide*, parce qu'il

Digitized by Google

eſt dans le demy Cercle, & par conſequent ſera ſemblable & égal au Triangle EMR de la premiere Figure, parce qu'ils ſont tous deux Triangles Rectangles, & que par la conſtruction l'Hypothenuſe KQ, & le coſté KN, ſont égaux, à l'Hypothenuſe ER, & au coſté EM.

Produiſez KN vers L & KP vers Q, vous aurez vn Inſtrument Geometrique & invariable compoſé ſeulement des deux lignes droites LK, KQ, (qui comprennent l'Angle LKQ plus grand que 37 degrez 28 minutes, & plus petit que 37 degrez 29 minutes) par le moyen deſquelles vous aurez d'abord la Racine du Cube double à tout Cube propoſé. Il faut porter depuis K vers L le coſté du Cube donné, & du point où finira ledit coſté deſcendre la perpendiculaire juſqu'à ce qu'elle coupe la ligne KQ, la partie coupée de la ligne KQ ſera le coſté du Cube double requis. Car tous les Triangles Rectangles KTV, KXY, KLQ, & tous autres ſeront ſemblables au Triangle KNP; c'eſt pourquoy ſi KT eſt le coſté du Cube donné à doubler, KV ſera le coſté du Cube double requis. Si KX eſt le coſté du Cube donné, KY eſt le coſté du Cube double du donné, & ainſi KQ eſt Racine d'vn Cube double, du Cube qui aura KL pour Racine &c.

LA TRISECTION DE L'ANGLE.

LE XXI. Iournal des Sçavans, du 21 Decembre M.DC.LXXVI. a publié trois de mes façons de diviſer tout Angle donné en trois Angles égaux; mais elles n'ont rien de commun auec la preſente Methode, par laquelle auec vn ſimple Compas, ou auec vne ſimple Regle, je trouve vn point requis par le premier de mes trois grands Problêmes que j'ay propoſez à tous les Geometres dans le XVI. Iournal des Sçavans du 17 Aouſt M. DC. LXXVI. que Mr de la Roche Conſeiller au Parlement de Grenoble & Mr le Marquis de Sainte Meſmes, ont reſolu diverſement par l'Algebre, mais la ſolution du dernier renvoye à la

Digitized by Google

Parabole pour trouver le point O requis, auec lequel ſans Parabole je fais icy dans la Planche troiſieſme, tout à coup & auec facilité, non ſeulement la Triſection d'vn ſeul Angle donné, mais de quatre differents Angles donnez de poſition, comme DEF, FER, RDH, HDA.

La Regle MG que j'employe eſt vne ſimple Regle ſur laquelle je marque depuis le point M en O, le ſemidiametre DE du Cercle dont les Arcs par exemple AC, CE, meſurent les Angles donnez ADC, CDE. Vne ſimple Regle ſuffit, comme on peut voir en la ligne AS de la troiſiéme Figure de la Planche du ſuſdit Iournal des Sçavans.

Le Compas DMO que j'employe au lieu de la ſuſdite Regle, eſt auſſi vn ſimple Compas, & le meſme que j'ay décrit dans la Duplication du Cube, ſes deux branches DM, MO ſont égales & plattes, & la pointe D eſt rebrouſſée, ou bien on la perce au point D auec vne petite aiguille pour l'appliquer ſur le point D, centre du demy Cercle AEZ. Dans l'vſage on applique vne Regle au coſté de la branche MO, ſi mieux on n'aime que la meſme branche MO, ſoit continuée juſques en G.

LEMME I.

La difference entre l'Arc de LX *degrez & les deux tiers de l'Arc de tout Angle aigu, eſt toujours les deux tiers de l'Arc de l'Angle Complement du Quart de Cercle.*

Dans la troiſiéme Planche, la corde BY eſtant le rayon du Cercle, l'Arc BY de LX degrez eſt les deux tiers de l'Arc AE de LXXXX degrez. Donc il eſt les deux tiers des Arcs AC & CE pris enſemble. Donc ſi de l'Arc AC on oſte l'Arc BC, qui eſt par la ſupoſition les deux tiers de l'Arc AC, il reſtera l'Arc CY, qui ſera les deux tiers de l'Arc CE.

LEMME II.

La difference entre l'Arc de LX *degrez & vn Tiers de l'Arc de tout Angle Obtus, eſt toujours vn Tiers de l'Arc de l'Angle Aigu Complement du demy Cercle:* & viciſſim, *La difference entre le Tiers de l'Arc d'vn Angle Aigu & l'Arc de* LX *degrez, eſt le Tiers de l'Arc de l'Angle Obtus Complement du demy Cercle.*

Dans la troiſiéme Planche la corde VT eſtant le Rayon du Cercle, l'Arc VT de LX degrez eſt le tiers du demy Cercle OR,

Digitized by Google

de CLXXX degrez. Donc il eſt le tiers des Arcs ON, NR pris enſemble. Or l'Arc NT par la ſupoſition eſt le tiers de l'Arc NR. Donc l'Arc NV ſera le tiers de l'Arc NO, puiſque l'Arc total VT eſt le tiers des deux Arcs ON, NR, & que l'Arc NT eſt le tiers de l'Arc NR.

PRATIQUE
De la Triſection Geometrique de tout Angle donné.

SOIT, dans la troiſiéme Planche, l'Angle Aigu donné FED, ou l'Angle Obtus FER ſon Complement au demy Cercle.

Du point E portez en D la longueur de DM branche du Compas DMO.

Du point D élevez ſur la ligne DE la perpendiculaire DA, que produirez vers Z; & du point D pris pour centre, faites du Rayon ou Semidiametre DE le demy Cercle AEZ. Faites auſſi du point E pris pour centre, le demy Cercle ONR, de quelque Rayon que ce ſoit.

Le demy Cercle AEZ coupe la ligne FE au point C, & par ainſi outre les deux Angles FED, FER, meſurez par l'Arc de 180 degrez du demy Cercle ONR, vous aurez encore les deux Angles ADC, CDE, meſurez par l'Arc de 90 degrez du Quart de Cercle ACE.

Soient enfin les quatre Angles DEF, FER, ADC, CDE, donnez de poſition, & propoſez à diviſer tout à la fois chacun en trois Angles égaux.

CONSTRVCTION.

Sur le point D, centre du demy Cercle AEZ, mettez la pointe D de la branche du Compas couché ſur le plan, ainſi que la Figure le repreſente. Ouvrez le Compas entraînant la branche MO ſur le Semidiametre DE, juſqu'à tant que le coſté interieur de la production de ladite branche vers G, ou d'vne Regle appliquée interieurement contre MO, la branche du Compas ſoit ſur C, point de l'interſection de l'Arc auec la ligne EF.

Du point D tirez DB, parallele à MC.

Du point E tirez ET, parallele à MC.

IE DIS 1°. Que l'Angle ADB eſt le tiers de l'Angle ADC.

2°. Que l'Angle FET eſt le tiers de l'Angle FER.

3°. Que ſi du point B on applique dans le demy Cercle

Digitized by Google

cle ACE, le Rayon BD en Y, l'Angle EDY ſera le tiers de l'Angle EDC.

4°. Que ſi du point T on applique dans le demy Cercle ONR le Rayon TE en V, l'Angle FEV ſera le tiers de l'Angle FED.

DEMONSTRATION
Que l'Angle ADB eſt le tiers de l'Angle ADC.

DV point M tirez en B la ligne MB. 1° elle ſera perpendiculaire ſur DE, par conſequent parallele à DA, laquelle par conſtruction eſt perpendiculaire ſur la meſme ligne DE. 2° ladite ligne MB diviſera en deux parties égales l'Angle DMO du ſommet du Triangle iſoſcele DMO.

La ligne MB eſt perpendiculaire ſur DE, parce que la ligne DE tombant ſur les lignes DB, OC, qui ſont paralleles par la conſtruction, fait l'Angle COE égal à ſon oppoſé interne ODB, *par la XXIX Propoſition du premier Livre des Elemens d'Euclide.*

Mais l'Angle COE eſt égal à l'Angle DOM ſon oppoſé au ſommet, *par la XV Propoſition du premier des Elemens.*

Et l'Angle DOM eſt égal à l'Angle ODM, *par la V Propoſition du premier des Elemens*, parce qu'ils ſont tous deux ſur la ligne DO, qui eſt la Baze du Triangle OMD, qui eſt iſoſcele par conſtruction.

Donc l'Angle KDB eſt égal à l'Angle KDM, *par le premier des Axiomes*, parce qu'ils ſont tous deux égaux à d'autres Angles COE, DOM, leſquels ſont auſſi égaux entr'eux.

Mais les deux Triangles KDB, KDM, ont le coſté KD commun, & les coſtez DB, DM, égaux, parce qu'ils ſont Rayons d'vn meſme Cercle, & les Angles KDB, KDM, qu'ils comprennent égaux. Et de plus leurs Angles KBD, KMD, ſont égaux, *par la V Propoſition du premier des Elemens*, parce qu'ils ſont tous deux ſur la Baze MB, du Triangle iſoſcelle MDB.

Donc les Triangles KDB, KDM, ſont égaux, *par la IV & par la XXVI Propoſition du premier Livre des Elemens.*

Donc les Angles DKB, DKM, ſont égaux.

Donc les Angles DKB, DKM, ſont Angles droits, *par la XIII Propoſition du premier des Elemens*, parce qu'ils ſont faits égaux par la ligne DK, qui tombe ſur la ligne MB.

Donc la ligne BK eſt perpendiculaire ſur DK.

Digitized by Google

Donc KB eſt parallele à DA, laquelle par la conſtruction eſt auſſi perpendiculaire ſur DK.

Donc l'Angle ADB eſt égal à l'Angle DBK, *par la* XXIX. *Propoſition du premier des Elemens*, parce qu'ils ſont Angles alternes faits par la ligne DB qui tombe entre les deux paralleles DA, KB.

Mais l'Angle DBK eſt égal à l'Angle DMK, *par la V Propoſition du premier des Elemens*, parce qu'ils ſont tous deux ſur la meſme Baze MB du Triangle iſoſcele MDB.

Donc l'Angle ADB eſt égal à l'Angle DMK, *par le premier des Axiomes*, parce que tous deux ſont égaux à l'Angle DBK.

Il faut maintenant demonſtrer que la ligne MB diviſe l'Angle DMO en deux Angles égaux BMD, BMC.

Les lignes DB, MC, ſont paralleles par la conſtruction.

Donc les Angles DBM, BMC ſont égaux, *par la* XXIX *Propoſition du premier Livre des Elemens*, parce qu'ils ſont Angles alternes faits par la ligne MB, qui tombe ſur les deux lignes paralleles DB, MC.

Mais l'Angle DBM eſt égal à l'Angle DMB. *par la V. Propoſition du premier des Elemens*, parce qu'ils ſont tous deux ſur la ligne MB, qui eſt la Baze du Triangle BDM iſoſcele.

Donc l'Angle BMC, eſt égal à l'Angle BMD *par le premier Axiome*, parce que tous deux ſont égaux à l'Angle DBM.

Donc l'Angle DMO eſt diviſé en deux Angles égaux, & chacun d'iceux eſt égal à l'Angle ADB.

Donc les trois Angles ADB, BMD, BMC, ſont égaux.

Il faut maintenant demonſtrer que les trois Angles ADB, BMD, BMC, pris enſemble, ſont égaux à l'Angle donné ADC.

En oſtant l'Angle ADB qui eſt commun, il reſte les deux Angles BMD, BMC, leſquels pris enſemble doivent eſtre égaux à l'Angle BDC, le reſte de l'Angle total ADC.

L'Angle BDC qui eſt au centre, vaut le double de l'Angle BMC, qui eſt en M à la circonference, & appuyé ſur le meſme Arc BC, *par la* XX *Propoſition du III Livre des Elemens.*

Mais l'Angle BMD eſt égal à l'Angle BMC. ce qui eſt prouvé cy-deſſus.

Donc l'Angle BDC eſt égal aux deux Angles BMD, BMC, pris enſemble, parce que chacun d'eux fait ſa moitié.

Donc les trois Angles égaux ADB, BMD, BMC, pris enſemble, ſont égaux à l'Angle ADC.

Digitized by Google

Donc l'Angle ADB eſt la troiſiéme partie de l'Angle donné ADC.

Donc on a donné la Triſection de l'Angle.

LA TRISECTION GEOMETRIQUE de l'Angle EDC.

DV point B appliquez dans le Cercle le Rayon BD en Y. l'Angle EDY ſera le tiers de l'Angle EDC, Complement de l'Angle ADC. Ce qui eſt cy-devant demonſtré par le premier Lemme.

DEMONSTRATION que l'Angle FET eſt le tiers de l'Angle FER.

LE Triangle DMO eſt iſoſcelle par la conſtruction.

Donc les Angles MDO, MOD ſont égaux, *par la V Propoſition du premier des Elemens*, parce qu'ils ſont tous deux ſur la Baze DO.

Mais l'Angle EOC eſt égal à l'Angle MOD, *par la* XV *Propoſition du premier des Elemens*, parce qu'il eſt ſon oppoſé au ſommet.

Donc l'Angle EOC eſt égal à l'Angle MDO *par le premier des Axiomes*, parce que tous deux ſont égaux au troiſieſme Angle MOD.

Mais l'Angle MDO eſt le meſme que l'Angle MDE ou EDM.

Donc l'Angle EOC eſt égal à l'Angle EDM.

Mais l'Angle EDM qui eſt au centre, eſt double de l'Angle ECM, qui eſt à la circonference en C, & appuyé ſur le meſme ArcEM, *par la* XX *Propoſition du troiſieſme Livre des Elemens.*

Donc l'Angle EOC, parce qu'il eſt égal à l'Angle EDM, eſt auſſi double de l'Angle ECM, ou ECO, qui eſt le meſme.

Mais ces deux Angles EOC, ECO, du Triangle ECO, parce qu'ils ſont les deux Angles internes & oppoſez à l'Angle externe FER, valent ledit Angle externe FER, *par la* XXXII *Propoſition du premier Livre des Elemens.* Et l'Angle ECO, parce qu'il eſt moitié de l'Angle EOC, eſt le tiers de la ſomme des Angles ECO, EOC.

Digitized by Google

Donc l'Angle ECO eſt auſſi le tiers de l'Angle donné FER.

Mais la ligne ET eſt parallele à OC, par la conſtruction.

Donc l'Angle FET eſt égal à l'Angle ECO, *par la* XXIX *Propoſition du premier Livre des Elemens*, parce qu'ils ſont Angles alternes faits par la ligne FE, qui tombe ſur les deux lignes paralleles OC, ET.

Donc l'Angle FET, parce qu'il eſt égal à l'Angle ECO, eſt auſſi le tiers de l'Angle donné FER.

Donc on a donné la Triſection de l'Angle.

LA TRISECTION GEOMETRIQUE de l'Angle FED.

DV point T appliquez dans le demy Cercle le Rayon TE en V, l'Angle FEV ſera le tiers de l'Angle FED, Complement de l'Angle obtus FER. Ce qui eſt cy-deuant demonſtré dans le ſecond Lemme.

COROLLAIRE.

Si on propoſe la Triſection d'vn Arc de plus de 180 degrez, faites vn Arc du ſommet de l'Angle pris pour centre; & produiſez l'vn des coſtez de l'Angle donné, vous aurez vn demy Cercle & vn Arc; diviſez le demy Cercle en trois Arcs égaux, en appliquant des extremitez du diametre le Rayon dans le demy Cercle. Diviſez en ſuite l'autre Arc en trois parties égales, l'vne de ces parties auec vn des trois Arcs égaux du demy Cercle vous donneront le tiers de tout l'Arc propoſé, qui eſtoit de plus de 180 degrez, &c.

Ie donneray dans ma nouvelle Geometrie entre pluſieurs autres methodes de diviſer geometriquement tout Angle donné en trois parties égales, celle qui conſiſte à appliquer vne ligne donnée pour ſervir de Baze à vn Triangle fait des deux lignes de l'Angle donné, en ſorte que la perpendiculaire élevée du milieu de cette Baze aille rencontrer vn point donné de poſition au deſſus & à coſté de l'Angle donné. Ce qui eſt le ſecond de mes trois Problêmes propoſez à tous les Geometres dans le XVI. Iournal des Sçavans, du 17 Aouſt M.DC.LXXVI.

L'INSCRIPTION

Digitized by Google

L'INSCRIPTION DE L'HEPTAGONE REGVLIER DANS LE CERCLE.

LES Mathematiciens ſçavent combien l'Inſcription Geometrique des Polygones Reguliers dans le Cercle ſe trouve neceſſaire.

Euclide a donné l'Inſcription du Pentagone Regulier *dans la onziéme Propoſition du IV. Livre des Elemens* ; mais ſa methode eſt tres longue & embarraſſée.

Albert Durer voulut ſuppléer au defaut d'Euclide, mais le Pentagone qu'il a bâty ſur vne ligne donnée dans ſon deuxiéme Livre de Geometrie eſt équilateral, & non pas équiangle.

Ptolomée dans ſon premier Livre de la grande Conſtruction ou Almageſte, a donné vne maniere tres facile d'inſcrire ce Pentagone. Il éleve du centre du Cercle le Rayon perpendiculaire ſur le Diametre, & ayant diviſé également vn ſemi-Diametre, il couche la diſtance de ce point du milieu du ſemi-Diametre à l'extremité du Rayon perpendiculaire, ſur le reſte du Diametre : car la diſtance de ce dernier point a la meſme extremité du Rayon perpendiculaire, fait le coſté du Pentagone inſcriptible dans le Cercle.

Toute l'Antiquité n'a pû donner l'Inſcription Geometrique de l'Heptagone Regulier ; Il eſt vray que pour la pratique la moitié du coſté du Triangle équilateral ou corde de 120 degrez donne le coſté de l'Heptagone, mais la rigueur Geometrique ne s'en doit pas contenter, de meſme qu'elle ne reçoit pas pour la Quadrature du Cercle vne pratique tres facile, laquelle donne vne ligne compoſée du demy Rayon & de la ligne laquelle peut le Rayon & le Sinus de 22 degrez 30 minutes, bien que cette ligne ne ſoit moindre de l'Arc de 90 degrez que d'environ vne des 21600 de ſes parties, & qu'on cherche encore la ſolution de ce

Digitized by Google

fameux Problême de la Quadrature du Cercle, qui ne consiste qu'à trouver vne ligne droite égale à la circonference, bien qu'on ait demonstré Geometriquement que le Diametre estant de 100000000000000000000 parties, la Circonference est moindre que la ligne qui auroit 314159265358979323847 des mesmes parties, & plus grande que la ligne qui auroit 314159265358979323846 des mesmes parties; d'où il resulte que la difference est comme infiniment petite.

Pour déterminer Geometriquement le costé de l'Heptagone Regulier inscriptible dans vn Cercle donné, il faut diviser en sept parties égales les deux Angles droits, ou leurs 180 degrez, en faisant auec les Rayons du Cercle *dans la Planche IV.* vn Triangle isoscelle AFI, dont chacun des Angles sur la Baze AI, soit les deux tiers de l'Angle du sommet AFI.

Comme les costez sont donnez, il reste à trouver la Baze AI. Produisez le Diametre RC en A, en sorte que la partie AC soit à la ligne AI (composée du Rayon IC & de la partie CA) ainsi que le Quarré du Rayon IC est au Quarré de la ligne AR, composée du Diametre RC & de la partie CA, car en suite la Geometrie demonstre que si sur la ligne AI prise pour Baze, on fait auec les Rayons du Cercle le Triangle isoscele AFI, chacun des Angles sur la baze AI vaudra les deux tiers de l'Angle du sommet AFI, & par ainsi chacun des Angles sur la Baze IAF, AIF, sont deux septiémes parties de 180 degrez, valeur de deux Angles droits, & par consequent la septiéme partie de quatre Angles droits qui comprennent tout le Cercle.

Tout le mystere gist par consequent à déterminer le poînt A, car d'iceluy appliquant au Cercle le Rayon AF, il partagera également en G l'Arc CF, & l'Arc CF sera la septiéme partie de tout le Cercle, & la corde CF sera par consequent le costé de l'Heptagone requis.

Il y a plusieurs manieres de trouver le point A sur le Diametre produit, ou de trouver le point G, ce qui suffit, estant en suite facile de faire l'Arc GF égal à l'Arc GC.

Ie n'employe icy que mon nouveau vsage du Compas pour la solution de ce Problême, ainsi que j'ay fait pour la Duplication du Cube & pour la Trisection de l'Angle.

Digitized by Google

PRATIQVE
de l'Inſcription de l'Heptagone Regulier dans le Cercle.

SOIT le Cercle donné CFKLHNP, dans lequel on demande l'Inſcription Geometrique de l'Heptagone Regulier, c'eſt à dire équiangle & équilateral.

Diviſez le Diametre CR en trois parties égales CM, ME, ER.

Du point R, extremité du Diametre, appliquez dans le Cercle en B Rayon RB.

Tirez la ligne EB.

Du point E pris pour centre & du Rayon EB, faites le demy Cercle OBS.

Du point E élevez le Rayon EX perpendiculaire ſur le Diametre OS.

Faites la Triſection de l'Angle SEB par mon Compas à deux branches ED, DY. Produiſez la ligne DY, & le Diametre RC, leur interſection donnera le point A requis, & l'Angle SAY ſera le tiers de l'Angle SEB, parce que l'Angle SEB externe vaut les deux internes du Triangle EAB, ſçavoir l'Angle EAB & l'Angle EBA ou EDB qui luy eſt égal, parce que le Triangle BED eſt iſoſcelle. Mais l'Angle EDB externe vaut les deux internes du Triangle EDA, ſçavoir DEA & DAE. Donc l'Angle EAB eſt le tiers de l'Angle SEB, parce que DAE eſt égal à DEA, car le Triangle ADE eſt iſoſcelle, puiſque par la conſtruction la branche du Compas ZD eſt égale à l'autre branche ou rayon DE, & que par ainſi DA eſt égale à DZ & AZ au Diametre OS. Ce qui arrive toutes les fois que les Angles, comme SEB, ſont partagez en trois parties égales au point D.

Du point A appliquez au Cercle en F la ligne AF égale au Rayon CI, elle coupera en G également l'Arc CF.

Tirez le Rayon IF, le Triangle AFI ſera iſoſcelle par la conſtruction, & chacun des Angles ſur la baze AI ſera les deux tiers de l'Angle du ſommet AFI, parce que AC eſt à AI, comme le Quarré de CI eſt au Quarré de AR, ce qui eſt connu des Geometres; & par conſequent l'Arc CF eſt la ſeptiéme partie de tout le Cercle.

Maintenant au lieu d'inſcrire dans le Cercle vn Triangle

Digitized by Google

ſemblable au Triangle AFI, comme a fait Euclide pour le Pentagone *dans la XI Propoſition du IV des Elemens*, il ſuffit de tirer la corde CF, car elle ſera le coſté de l'Heptagone Regulier requis. Ce qui reſte à demonſtrer.

DEMONSTRATION
Que la corde CF eſt le coſté de l'Heptagone Regulier.

TIrez le Rayon IG, il diviſera également l'Angle FIA, parce que le point G partage également l'Arc CF, qui eſt la meſure dudit Angle FIA.

Le Triangle FIG eſt iſoſcelle, parce que ces deux coſtez ſont des Rayons du meſme Cercle.

Donc les Angles IGF, IFG ſont égaux, *par la V Propoſition du premier des Elemens*, parce qu'ils ſont ſur la baze GF.

Mais l'Angle externe FGI vaut les deux Angles GAI, GIA, pris enſemble, *par la* XXXIII *du premier des Elemens*, dautant qu'ils luy ſont internes & oppoſez dans le Triangle GAI.

Donc l'Angle GFI; parce qu'il eſt égal à l'Angle FGI, vaut auſſi les deux Angles GAI, GIA, pris enſemble.

Mais l'Angle GIA eſt moitié de l'Angle GAI, parce qu'il eſt moitié de l'Angle FIA, qui eſt égal à l'Angle GIA.

Donc l'Angle GFI du ſommet du Triangle AFI eſt *Sexqui-alter* de chacun des Angles ſur la baze.

Donc chacun des Angles ſur la baze AI, vaut les deux tiers de l'Angle du ſommet AFI.

Donc les deux Angles droits valeur des trois Angles du Triangle AFI, eſt partagée en ſept parties égales.

Mais l'Angle FIA vaut deux deſdites ſeptiémes parties de ces deux Angles droits.

Donc ledit Angle FIA eſt la ſeptiéme partie de quatre Angles droits.

Mais les quatre Angles droits ont pour meſure tout le Cercle.

Donc l'Arc CF eſt la ſeptiéme partie de tout le Cercle, parce qu'il eſt la meſure de l'Angle FIA, qui eſt la ſeptiéme partie des quatre Angles droits.

Donc la Corde CF de l'Arc CF eſt le coſté de l'Heptagone Regulier CFKLHNP inſcrit au Cercle, dont le Diametre eſt CR.

AVTRE

Digitized by Google

AVTRE DEMONSTRATION.

PARCE que le Rayon IG divise également l'Arc CF, il divise aussi également l'Angle CIF, qui est mesuré par ledit Arc CF.

Les Triangles AFI, FIG, sont isoscelles, parce que deux de leurs costez sont Rayons du Cercle.

Donc l'Angle FGI externe, vaut les deux Angles GAI, GIA, internes & opposez, ou leurs égaux FIA, FIG.

Donc l'Angle FGI, ou son égal GFI, vaut trois fois l'Angle GIA, ou son égal GIF.

Produisez le Rayon GI jusqu'en H, tirez FH & CH, les Arcs FH, CH seront égaux, parce que GH estant Diametre, chacun des Arcs FH, CH est la moitié du Cercle moins vn des Arcs CG, ou FG, qui sont égaux.

Donc les Cordes HF, HC sont égales, *par la* XXIX. *du* III. *Livre des Elémens.*

Donc le Triangle FHC est isoscelle.

L'Angle FHC qui est en la Circonference, est la moitié de l'Angle FIC qui est au centre, & appuyé sur le mesme Arc CF, *par la XX Proposition du III Livre des Elemens.*

Mais l'Angle FIG est la moitié de l'Angle FIC.

Donc l'Angle FIG est égal à l'Angle FHC.

Mais les Triangles FIG, FHC sont isosceles, & leurs Angles égaux FIG, FHC sont compris par leurs costez égaux.

Donc les Triangles isoscelles FIG, FHC, sont équiangles.

Mais dans le Triangle FIG, l'Angle du sommet FIG est le tiers de chacun des Angles IFG, IGF, qui sont sur sa Baze FG.

Donc aussi dans le Triangle isoscelle FHC, l'Angle du sommet FHC est le tiers de chacun des Angles HFC, HCF, lesquels sont encore égaux, *par la* XXVII *Proposition du troisiesme Livre des Elemens d'Euclide*, parce qu'ils s'appuyent sur Arcs égaux FH, CH.

Donc chacun des Arcs FH, CH, contient trois fois l'Arc FC.

Donc chacun de ces Arcs FH, CH, contient aussi trois fois la Corde CF; sçavoir les trois Cordes FK, KL, LH; & les trois Cor-

Digitized by Google

des CP, PN, NH ; lesquelles sont toutes six égales entr'elles, puis qu'elles sont égales à la septiéme Corde CF.

Donc cette corde CF est le costé de l'Heptagone Regulier équilateral & équiangle CF, FK, KL, LH, HN, NP, PC, inscrit dans le Cercle donné. Ce qui estoit requis.

Permis d'imprimer. Fait ce 7 d'Avril 1677. DE LA REYNIE.

DE DVPLICATIONE CVBI

INVENTA A D. COMIERS

Ecclesiæ Collegialis de Ternant Præposito,

Sacræ Theologiæ Doctore,

Equite Torquato Ordinis Militaris Crucis Iesu Christi,

Et Sanctissimi Domini nostri Papæ,

Sedisque Apostolicæ Protonotario.

EPIGRAMMA ANAGRAMMASTICVM.

CLAVDIVS COMIERS

CLARVS AMICVS DEI.

Hic tandem Cubicas Duplavit Presbyter Aras,
Aris nanque *DEI CLARVS AMICVS* adest.

Fredericus Henricus de Gassion.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google